

《管子》与古代数学

乐爱国

011

一般认为,先秦的数学以《墨经》、《考工记》中的数学知识为代表。然而,先秦重要典籍《管子》中也有丰富的数学知识。虽然《管子》中没有专门论述数学的篇章,但其中含有丰富的重视计数的思想,有大量涉及数及数量关系的论述,在先秦诸子典籍中是很有特色的,其中的数学知识甚至并不比《墨经》、《考工记》中的逊色。

一、重视计数的思想

《管子》书以议论经邦治国为主题,内容涉及政治、经济、军事、科技等多方面。而从这些方面的大量论述中不难看出《管子》对计数的重视。

《管子·七法》(以下引《管子》只写篇名)认为,治国、治军有“七法”,即“则、象、法、化、决塞、心术、计数”,这里所谓的计数指的是“刚柔也,轻重也,大小也,实虚也,远近也,多少也”。显然是指数学上的计算。《管子》把运用数学知识进行计算看作是治国、治军所必备的基本原则之一,可见对计数的重视。《七法》篇还说:“不明于计数而欲举大事,犹无舟楫而欲经于水险也。……举事必成,不知计数不可”。不知计数就办不好治国、治军的大事。

《七法》篇不仅指出了“计数”为“七法”之一,而且作为“七法”中的另一项基本原则的“法”也与计数有关。所谓“法”,指的是“尺寸也,绳墨也,规矩也,衡石也,斗斛也,角量也。”就是指计量的标准。《七法》篇还说:“不明于法,而欲治民一众,犹左书而右息之。……治民一众,不知法不可。”认为要治理民众就必须懂得计量标准。

《山国轨》篇是专门讨论如何统计理财的。这里的“轨”通“会”,总计或统计之意,“国轨”是指国家的统计工作。在《山国轨》篇中,齐桓公问管仲:“行轨数奈何?”管仲回答说:“某乡田若干?人事之准若干?谷重若干?曰:某县之人若干?田若干?币若干而中用?谷重若干而中币?终岁度人食,其余若干?曰:某乡女胜事者终岁绩,其功业若干?以功业直时而扩之,终岁,人已衣被之后,余衣若干?”显然,“轨”即为统计。管仲还说:“田有轨,人有轨,用有轨,人事有轨,币有轨,乡有轨,县有轨,国有轨,不通轨数而欲为国,不可。”

《管子》书中有《乘马》、《巨乘马》、《乘马数》和已佚失的《问乘马》均与“乘马”有关。这里的“乘”是加减乘除之“乘”,“马”是计数筹码之“码”,“乘马”是指计算筹划之意。在《巨乘马》篇中,管仲认为,“策乘马之数未尽”,即没有很好地计算筹划,国家就有可能发生“内战”。在《乘马数》篇中,管仲说:“猛毅之人淫暴,贫病之民乞请,君行律度焉,则民被刑僇而不从于主上,此策乘马之数亡也。”显然,计数关系到国

家的治乱。

《管子》重视计数，同时也十分重视与数学之数不同的“数”。《重令》篇说：“天道之数，至则反，盛则衰。”这里的“数”指规律。《侈靡》篇说：“古之祭，有时而星，有时而雩，有时而雩，有时而胸。鼠应广之实，阴阳之数也。”这里的“数”指自然规律。

《幼官》篇说：“明必胜则慈者勇，器无方则愚者智，攻不守则拙者巧，数也。”这里的“数”指社会规律。《管子》中的“数”还在许多情况下指方法。《七法》篇所说的“为兵之数”，还说：“遍知天下而不明于机数，不能正天下。”这里的“数”指方法。在《轻重》诸篇中，“数”多指方法，《山权数》、《乘马数》、《山至数》、《地数》之“数”均指方法。与重视计数一样，《管子》也非常重视这类实指规律、方法的“数”。但是，重视作为规律、方法的“数”与重视计数毕竟具有不同的内涵，不可混为一谈。

二、《管子》中的数学知识

《管子》重视计数，重视事物之间的数量关系，因此在许多论述中都包含了丰富的数学知识。《管子》所涉及的数学知识主要有以下几个方面：

一、分数的表示

《管子》中在许多地方都出现分数，且分数的表示方式略有差别，大致可分为以下4类：

其一，M去（取）N。《国蓄》篇说：“今人君籍求于民，令曰十日而具，则财物之贾什去一；令曰八日而具，则财物之贾什去二……什去半……什去九”。有时还在“去”之前加“分”或“而”，成为“M分去N”或“M而去N”。《乘马》篇说：“一切见水轻征，十分去一；……五尺见水，十分去一。”《山至数》篇说：“君出谷，什而去七”。与“M去N”相对应的是“M取N”。《幼官》篇说：“三会诸侯令曰：田租百取五，市赋百取二，关赋百取一”。《大匡》篇说：“君公践位十九年，弛关市之征，五十而取一，赋禄以粟，案田而税，二岁而税一，上年什取三，中年什取二，下年什取一。”这里的“五十而取一”在“取”之前加“而”，为“M而取N”的形式。

其二，用什N、伯N表示十分之N、百分之N。《八观》篇说：“什一之师，什三毋事，则稼亡三之一。”《巨乘马》篇说：“国谷之扩，一切什九。”《轻重丁》篇说：“其称贷之家多者千万，少者六、七百万。其出之，中伯伍也。……其出之，中伯二十也。”

其三，M分（之）N。《中匡》篇说：“管仲会国用，三分二在宾客，其一在国”。与“M分N”相对应的是“M之N”。《八观》篇说：“其稼亡三之一者，命曰小凶”。《山权数》篇说：“藏三之一不足以伤民”，“乘轻而守之以策，则十之五有在上。”《揆度》篇说：“共工之王，水处什之七，陆处什之三”。《轻重乙》篇说：“行者不能百之一，千之十”。这种分数表示形式已接近今天的“M分之N”。

其四，M分之N。《轻重丁》篇说：“阴雍长城之地，其于齐国三分之一，非谷所生也。海庄、龙夏，其于齐国四分之一也，朝夕外之，所埽齐地者五分之一，非谷之所生也。”《度地》、《地员》和《轻重戊》等篇都提到“十分之二”、“十分之三”等等。这些与今天的分数表示法完全一致。

二、度量衡

《管子》中涉及不少度量衡单位。长度单位有：里、步、丈、尺、寸、制、匹、两、

寻、仞、施等。与吴承洛先生的《中国度量衡史》中“中国上古度量命名表”所列的长度单位相比,《管子》中多了“制”、“施”。《乘马》篇说:“季绢三十三制当一镒……经暴布百两当一镒”。“制”是季绢的计量单位,就象经暴布以两为计量单位,1两=40尺,1制=18尺。《管子》中的“施”可见《地员》篇所说:“其施七尺”,1施=7尺。

《管子》中所涉及的面积单位有:步、亩、顷、方里(里)等。

《管子》中的容量单位有:鼓、石、斗、豆(斛)、升、釜、钟、区(甔)等。其中的“鼓”也为《中国度量衡史》中所没有提到的。《山国轨》篇说:“亩十鼓之壤,君不以轨守,则民且守之”。1鼓=12石。

《管子》中的重量单位有:斤、钧、镒等。其中的“镒”为黄金计量单位,1镒=24两,也是《中国度量衡史》中所未曾提到的。

《管子》中不仅提及各种度量衡单位,而且还有某些度量衡单位的换算关系。《海王》篇说:“升加二强,釜二百也,钟二千”。可见,1钟=10釜,1釜=100升。《轻重丁》篇说:“今齐西之粟百泉,则甔二十也。……请以令籍人三十泉……齐西出三斗而决其籍。”可以从中得知,1釜=5甔,1釜=10斗。《左传·昭公三年》中晏子说:“齐旧四量,豆、区、釜、钟,四升为豆,各自其四,以登于釜,釜十则钟。陈氏三量,皆登一焉,钟乃大矣”。按照齐旧量,1钟=10釜,1釜=4区=16豆=64升。陈氏量中,1钟=10釜,1釜=5区=25豆=125升。可见,《海王》篇的1钟=10釜与齐旧量、陈氏量相同,《轻重丁》篇的1釜=5甔与陈氏量相同,而不同于齐旧量;《海王》篇的1釜=100升与齐旧量、陈氏量均不同。

三、数学运算

《管子》所涉及的数学运算主要有以下几类:

(1) 整数加减法:《禁藏》篇说:“富民有要,食民有率,率三十亩而足于卒岁。岁兼美恶,亩取一石,则人有三十石;果疏素食当十石,穰秕六畜当十石,则人有五十石。”即, $30 + 10 + 10 = 50$ 。《巨乘马》篇说:“日至六十而阳冻释,七十五日而阴冻释。阴冻释而秬稷,百日不秬稷,故春事二十五日之内耳也。”即, $100 - 75 = 25$ 。《小匡》篇说:“制国以为二十一乡,商工之乡六,士农之乡十五。公帅十一乡,高子帅五乡,国子帅五乡。”即, $21 = 6 + 15 = 11 + 5 + 5$ 。

(2) 整数乘法与乘方:在《管子》中,共有九条乘法口诀。《地员》篇在论述地下水位的高低与土壤类别之间的关系时涉及“五七三十五”、“四七二十八”、“三七二十一”、“二七一十四”、“六七四十二”、“七七四十九”、“七八五十六”、“七九六十三”,八条乘法口诀,这在李俨先生的《中国数学大纲》中已经列出。此外,《海王》篇在论述提高剪刀的价格时说:“刀之重加六,五六三十,五刀一人之籍也”。《地员》篇还有10至20分别乘以7的整数乘法运算。《管子》中的其它各篇也有涉及整数乘法运算。《乘马》篇说:“一乘者,四马也;一马,其甲七,其蔽五;一乘,其甲二十有八,其蔽二十”。即, $7 \times 4 = 28$, $5 \times 4 = 20$ 。《巨乘马》篇说:“起一人之繇,百亩不举;起十人之繇,千亩不举;起百人之繇,万亩不举;起千人之繇,十万亩不举”。即, $100 \times 10 = 1000$, $100 \times 100 = 10000$, $100 \times 1000 = 100000$ 。《海王》篇说:“升加一强,釜百也。升加二强,釜二百也,钟二千,十钟二万,百钟二十万,千钟二百万。……日二万,十日二千万,一月六千万”。也涉及一系列整数乘法。《地员》篇有一论述涉及乘方,其中说道:“凡将起五音,凡首,先主一而三之,四开以合九九,以是生黄钟小素之首,以成宫。”即

$$3^4 = 9 \times 9 = 81.$$

(3) 分数乘法:《地员》篇在那段涉及乘方的论述之后,紧接着说:“三分而益之以一,为百有八,为微;不无有三分而去其乘,适足,以是生商;有三分,而复于其所,以是成羽;有三分,去其乘,适足,以是成角。”这里涉及一系列分数乘法运算: $81 \times \frac{1}{3} + 81 = 108$, $108 \times \frac{2}{3} = 72$, $72 \times \frac{1}{3} + 72 = 96$, $96 \times \frac{2}{3} = 64$ 。《海王》篇说:“令盐之重升加分强,釜五十也。”“分强”即 $\frac{1}{2}$ 钱, 1釜=100升, $\frac{1}{2} \times 100 = 50$ 。《乘马数》篇说:“岁藏三分,十年则必有三年之余”即, $\frac{3}{10} \times 10 = 3$ 。

四、比例问题

《管子中》中的比例主要有正比例和反比例:

就正比例而言,《轻重甲》篇中管仲说:“粟贾平四十,则金贾四千。粟贾釜四十,则钟四百也,十钟四千也,二十钟者为八千也。金贾四千,则二金中八千也。然则一农之事终岁耕百亩,百亩之收不过二十钟,一农之事乃中二金之财耳。……釜四百,则是钟四千也,十钟四万,二十钟者八万。金贾四千,则十金四万,二十金者八万。故发号出令,曰一农之事有二十金之策。”当粟的价格每釜40钱时,20钟为8000钱,农民一年耕种所得20钟,折合8000钱,相当于二金;当粟的价格升至每釜400钱时,20钟为80000钱,农民耕种所得20钟,相当于二十金。粟价上升至10倍,农民的收入也上升至10倍。《国蓄》篇说:“中岁之谷,粟石十钱。大男食四石,月有四十之籍;大女食三石,月有三十之籍;吾子食二石,月有二十之籍。岁凶谷贵,粟石二十钱。则大男有八十之籍,大女有六十之籍,吾子有四十之籍。”粮价增加一倍,每月所征的税也增加一倍。

《轻重丁》篇中管仲说:“今齐西之粟釜百泉,则钅二十也;齐东之粟釜十泉,则钅二钱也。请以令籍人三十泉,得以五谷菽粟决其籍。若此,则齐西出三斗而决其籍,齐东出三釜而决其籍。”齐西的粮价是齐东粮价的10倍,而所缴纳用于抵税的粮食反比齐东少,是齐东的 $\frac{1}{10}$ 。粮价高的,所缴纳的粮食反而少;粮价低的,所缴纳的粮食反而多,这正是反比例关系。

三、《管子》数学的历史地位

《管子》一书包含了丰富的古代数学的知识。然而,《管子》的成书年代至今仍颇多争议。但多数学者认为,《管子》书并非春秋时期辅佐齐桓公的管仲所作,而且也非一人所作,非一时之作。一般认为,《管子》书的大部分篇章写成于战国时代齐国的稷下学宫,出自稷下学者之手;甚至不少人认为,《管子》书是齐国稷下学者的著作集。因此,《管子》与战国时代包含丰富数学知识的《考工记》、《墨经》几乎属同时代的作品。

《墨经》中的数学涉及到一些数学的命题和定义,已具有理论数学的萌芽。《考工记》是一部有关手工业生产规范的汇集,并非数学专著,而是在论述手工业生产时涉及到许多数学知识;从所涉及的数学知识看,多属实用数学。《管子》中的数学知识与《考工记》的非常相近。《管子》是在论述经邦治国时涉及到许多数学知识,而且也多属实用数学,而与

《墨经》中的数学知识不同。

然而,就《管子》所反映的重视计数思想和所涉及的数学知识与《考工记》的数学知识相比,《管子》在数学方面已有明显的进展,至少表现为以下三个方面:

第一,《管子》已经明确地意识到数学的社会功能,因而能较为自觉地运用数学知识,明显具有一定的数学意识,这就为后来数学成为独立的学科准备了思想基础。《考工记》在这方面则明显欠缺。

第二,《管子》中的数学知识涉及面较广,内容较丰富。《管子》中有各种分数表示法,度量衡知识,还有各种数学运算、比例问题。《考工记》中的数学知识主要有分数表示法、角度和度量衡方面的知识。在《考工记》中,度量衡知识较为丰富,但很少涉及数学运算,更没有《管子》中所出现的乘法口诀和较为复杂的分数乘法、比例问题。

第三,《管子》中数学的水平比《考工记》的已有明显的提高。《考工记》中的分数表示法还没有象《管子》那样明确地提到与今天的分数表示法完全一致的形式。而且从《管子》中的各种数学运算也可以看出,《管子》中的数学知识已经较《考工记》有很大的发展。从中国古代数学史的发展看,《管子》中的数学知识要比《考工记》更加接近作为中国古代数学体系形成标志的《九章算术》。《九章算术》以数学运算为主要内容,书中收集了246个应用问题和各应用题的解法。就《考工记》和《管子》中所涉及的实用数学知识与《九章算术》的关系而言,《管子》由于涉及大量《考工记》中所没有涉及的数学运算方面的知识而与《九章算术》的关系较为密切。《管子》中已有初步的分数乘法(整数与分数相乘),《九章算术》中则有较为复杂的分数乘法(分数与分数相乘)和分数加减法;而且,《管子》中也已经涉及到《九章算术》中所具有的比例问题。而这些数学知识在《考工记》中都没有明显地提到。

在中国古代数学史上,《墨经》在理论数学方面具有很高的成就,但是,《墨经》所开创的理论数学传统却没有能在后世得到继承和发展。秦汉以后的中国数学一直偏重于实用数学方面的发展,以计算见长、以解决实际问题见长成为中国古代数学传统的基本特征,因而《考工记》和《管子》中所涉及的实用数学的特点得到了继承和发展。而且从《管子》的数学知识比起《考工记》的数学知识已有明显的发展而言,《管子》的数学是中国古代数学体系形成过程中的重要环节,也是先秦数学的极其重要的内容,与《墨经》、《考工记》中的数学具有同样重要的历史地位。

主要参考文献

- [1] 《管子》,《四部丛刊》本,上海商务印书馆,1919年。
- [2] 郭沫若等:《管子集校》,(上、下),科学出版社,1956年第1版。
- [3] 赵守正:《管子通解》,(上、下),北京经济学院出版社,1989年第1版。
- [4] 杜石然等:《中国科学技术史稿》,(上、下),科学出版社,1982年第1版。
- [5] 李俨:《中国数学大纲》,(上),科学出版社,1958年第1版。
- [6] 钱宝琮:《中国数学史》,科学出版社,1964年第1版。
- [7] 吴承洛:《中国度量衡史》,上海书店,1984年第1版。
- [8] 闻人军:《考工记导读》,巴蜀书社,1988年第1版。
- [9] 方孝博:《墨经中的数学和物理学》,中国社会科学出版社,1983年第1版。

〔作者简介〕 乐爱国,男,1955年11月生,1983年毕业于华东师范大学哲学系,1986年毕业于复旦大学哲学系,获哲学硕士学位。现任厦门大学自然辩证法研究室讲师。通讯地址:福建厦门大学435信箱 邮政编码:361005

(本文责任编辑 王克迪)